2023年度 医学部　一般選抜　1次　1月20日　数学

Ⅰ　複数の玉が入った袋から玉を1個取り出して袋に戻す事象を考える．どの玉も同じ確率で取り出されるものとし，n を自然数として，以下の問いに答えよ．

(1)　袋の中に赤玉1個と黒玉2個が入っている．この袋の中から玉を1個取り出し，取り出した玉と同じ色の玉をひとつ加え，合計2個の玉を袋に戻すという試行を繰り返す．n 回目の試行において赤玉が取り出される確率を p_n とすると，次式が成り立つ．

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad p_3 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

(2)　袋の中に赤玉3個と黒玉2個が入っている．この袋の中から玉を1個取り出し，赤玉と黒玉を1個ずつ，合計2個の玉を袋に戻す試行を繰り返す．n 回目の試行において赤玉が取り出される確率を P_n とすると，次式が成り立つ．

$$P_2 = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}},\quad P_3 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

n 回目の試行開始時点で袋に入っている玉の個数 M_n は $M_n = n + \boxed{\text{ス}}$ であり，この時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数 R_n は $R_n = M_n \times P_n$ と表される．n 回目の試行において黒玉が取り出された場合にのみ，試行後の赤玉の個数が試行前と比べて $\boxed{\text{セ}}$ 個増えるため，$n+1$ 回目の試行開始時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数は $R_{n+1} = R_n + (1 - P_n) \times \boxed{\text{セ}}$ となる．したがって，

$$P_{n+1} = \frac{n + \boxed{\text{ソ}}}{n + \boxed{\text{タ}}} \times P_n + \frac{1}{n + \boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ．このことから，

$$(n+3) \times \left(n + \boxed{\text{ツ}}\right) \times \left(P_n - \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right) \text{が } n \text{ に依らず一定}$$

となることがわかり，

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

と求められる．

Ⅱ $\boxed{ヌ}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ．

点Oを原点とする座標空間に3点A$(-1,0,-2)$，B$(-2,-2,-3)$，C$(1,2,-2)$がある．

(a) ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積は$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{アイ}$であり，△ABCの外接円の半径は$\sqrt{\boxed{ウエ}}$である．

△ABCの外接円の中心を点Pとすると，$\overrightarrow{AP}=\boxed{オ}\,\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\overrightarrow{AC}$が成り立つ．

(b) △ABCの重心を点Gとすると，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$であり，線分OBを2：1に内分する点をQとすると，

$$\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}},\ \frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}},\ \boxed{タ}\right)$$

となる．

(c) 線分OCを2：1に内分する点をRとし，3点A，Q，Rを通る平面αと直線OGとの交点をSとする．点Sは平面α上にあることから，

$$\overrightarrow{OS}=t\,\overrightarrow{OA}+u\,\overrightarrow{OB}+v\,\overrightarrow{OC}$$

$$\left(\text{ただし，}t,\ u,\ v\text{ は }t+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}u+\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}v=1\text{ を満たす実数}\right)$$

と書けるので，$\overrightarrow{OS}=\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{OG}$となることがわかる．

平面α上において，点Sは三角形AQRの $\boxed{ヌ}$ に存在し，四面体O–AQRの体積は，四面体O–ABCの体積の$\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$倍である．

$\boxed{ヌ}$ の解答群

① 辺AQ上　② 辺AR上　③ 辺QR上　④ 内　部　⑤ 外　部

Ⅲ $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

座標空間において原点Oを中心とする半径1の円 C が xy 平面上にあり, $x>0$ の領域において点A$(0,-1,0)$から点B$(0,1,0)$まで移動する C 上の動点をPとする.

(1) 下記の2条件を満たす直角二等辺三角形PQRを考える.

・点Qは C 上にあり, 直線PQは x 軸に平行である.

・点Rの z 座標は正であり, 直線PRは z 軸に平行である.

点Pが点Aから点Bまで移動するとき, 三角形PQRの周および内部が通過してできる立体 V について, 以下の問いに答えよ.

(a) 点Pが点Aから点Bまで移動するとき, 線分PRが通過してできる曲面の展開図は, 横軸に弧APの長さ, 縦軸に線分PRの長さをとったグラフを考えればよく, $\boxed{\text{ア}}$ で表される概形となり, その面積は $\boxed{\text{イ}}$ である.

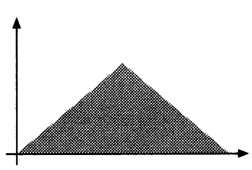
線分PQの中点をMとし, 点Mから直線QRに引いた垂線と線分QRとの交点をHとする. 点Hは, 線分QRを $1:\boxed{\text{ウ}}$ に内分する点である. 点Pの位置に依らず, 線分の長さについて

$$\boxed{\text{エ}}\times(\mathrm{MH})^2+(\mathrm{OM})^2=1$$

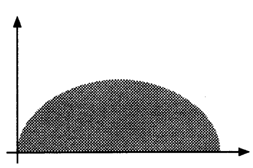
が成り立つ. 点Pが点Aから点Bまで移動するとき, 線分MHが通過する領域の概形は $\boxed{\text{オ}}$ であり, 面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である.

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の解答群

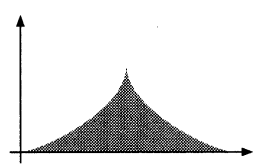
①



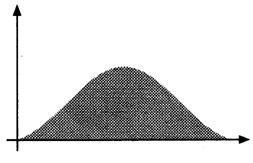
②



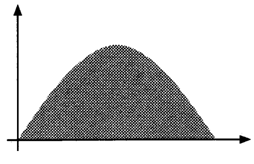
③



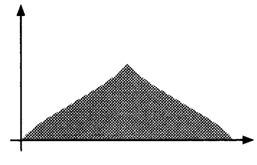
④



⑤



⑥



(b) 点Pが点Aから点Bまで移動するとき，線分 QR が通過してできる曲面上において，2点 A，B を結ぶ最も短い曲線は $\boxed{\text{ク}}$ が描く軌跡である．

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① 点Q　　② 点R

③ 設問(a)で考えた点H　　④ 線分 QR と yz 平面との交点

⑤ 線分 QR を $1:\sqrt{2}$ に内分する点　　⑥ 線分 QR を $\sqrt{2}:1$ に内分する点

⑦ 三角形 PQR の重心から線分 QR に引いた垂線と線分 QR との交点

(c) 点Pが点Aから点Bまで移動するとき，線分 PQ を直径とする xz 平面に平行な円が通過してできる球の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である．

また，三角形 PQR の面積は，線分 PQ を直径とする円の面積の $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\pi}$ 倍である．したがって，立体 V の体積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

(2) $z \geqq 0$ の領域において，yz 平面上の点Tを頂点とし，2点P，Qを通る放物線 L を考える．ただし，Q，Tは下記の2条件を満たす点である．

・点Qは C 上にあり，直線 PQ は x 軸に平行である．

・三角形 PQT は xz 平面に平行であり，点Tの z 座標は線分 PQ の長さに等しい．

点Pが $(1,0,0)$ であるとき，放物線 L を表す式は

$$y = 0, \qquad z = \boxed{\text{セソ}}\,x^2 + \boxed{\text{タ}}, \qquad (\text{ただし}\ -1 \leqq x \leqq 1)$$

であり，この放物線と線分 PQ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

点Pが点Aから点Bまで移動するとき，放物線 L と線分 PQ で囲まれる図形が通過してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である．